محاضره رياضة ٢

$$(x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)\right]$$

Ex find roots of $(z+1)^7 + z^7 = 0$

Sol

$$(z+1)^7 = -z^7 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^7 = -1$$

$$\frac{z+1}{z} = (-1)^{\frac{1}{7}} \quad ; \quad x=-1 \;,\; y=0$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = \pi$$

$$\frac{z_k+1}{z_k} = 1^{\frac{1}{7}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi+2K\pi}{7}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi+2K\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2K\pi}{7}\right)$$

$K = 0, 1, 2, \ldots$

$$Z_{K+1} = Z_K \cdot e^{\left(\frac{\pi + 2K\pi}{7}\right)}$$

$$1 = Z_K \cdot e^{\left(\frac{\pi + 2K\pi}{7}\right)} - Z_K = \left(e^{\left(\frac{\pi + 2K\pi}{7}\right)} - 1\right) * Z_K$$

$$Z_K = \frac{1}{e^{\left(\frac{\pi + 2K\pi}{7}\right)} - 1}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

$\boxed{1}$ مجموع الجذور $\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$\boxed{2}$ مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى $= \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$\vdots$

$\boxed{3}$ حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

$\boxed{EX}$ use $Z^n - 1 = 0$; $n = 2, 3, \ldots$ to show:

$\boxed{1}$ $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$

$\boxed{2}$ $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

$\boxed{2}$ Lec 2

$\boxed{3}$ $\left(\sin \frac{\pi}{n}\right)\left(\sin \frac{2\pi}{n}\right) \cdots \left(\sin \frac{(n-1)}{n}\pi\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

$\boxed{\text{solution}}$

$$z^n - 1 = 0 \Rightarrow z = (1)^{\frac{1}{n}} \quad ; \quad x = 1,\ y = 0,\ r = 1,\ \theta = 0$$

$$z = r e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} = e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i}$$

The roots $z_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$; $k = 0, 1, \cdots$; $n = 1$

← مجموع الجذور = صفر (معامل $z^{n-1} = 0$)

$$z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = 0$$

$$e^0 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{\frac{4\pi i}{n}} + \cdots + e^{\frac{2(n-1)\pi}{n} i} = 0$$

$$1 + \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right) + \left(\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}\right)$$

$$+ \left[\cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = 0$$

← نساوي الحقيقي بالحقيقي

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos \frac{2(n-1)}{n}\pi = 0$$

$$\therefore \boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) \dots = -1}$$

ـــ تساوى التخيلى بالتخيلى

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0}$$

Curves and rigion on Complex Plan

ـــ المنحنيات والمناطق فى مستوى الأعداد المركبة.

$\boxed{1}$ $|Z - Z_0| = C$

ـــ المحل الهندسى لجميع النقط التى تتحرك فى (Z-Plane)
بحيث أن بعدها عن نقطة ثابتة يساوى مقدار ثابت.

Notes $Z = x + iy$; $Z_0 = x_0 + iy_0$

$$|Z - Z_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = C$$

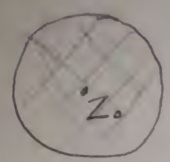
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = C$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = C$$

ـــ دائرة مركزها (x_0, y_0)
ونصف قطرها (C)

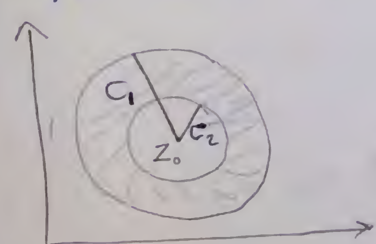
$\boxed{2}$ $|z - z_0| \leq c$

ـــ المنطقة داخل الدائرة التي مركزها (Z_0)
و نصف قطرها c .



$\boxed{3}$ $|z - z_0| > c$ $\Longrightarrow$ المنطقة خارج الدائرة

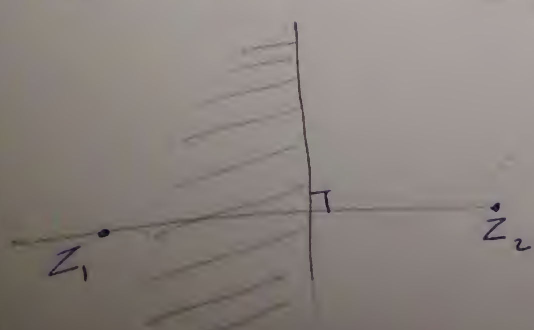
$\boxed{4}$ $c_2 \leq |z - z_0| \leq c_1$ (annuluc حلقة)



$\boxed{5}$ $|z - z_1| \leq |z - z_2|$

ـــ المحل الهندسي لجميع النقاط التي تتحرك بحيث بعدها عن Z_1
أقل من أو يساوي بعدها عن Z_2
(خلينا الأول في حالة التساوي)

* الشكل الناتج خط عمودي على
المسافة و التهشير يكون في المنطقة
التي يقع فيها Z_1 .

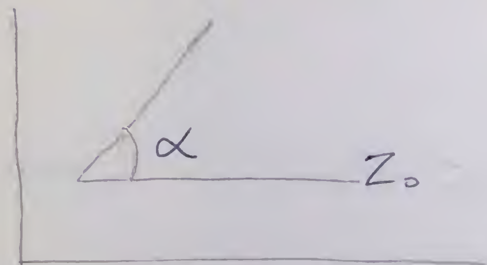


$\boxed{6}$ $|Z - Z_1| + |Z - Z_2| = c$

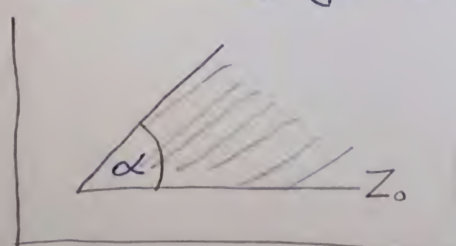
* نلاحظ أنه هذه المعادلة تعطى المحل الهندسى لجميع النقط التى مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوى مقدار ثابت.

* قطع ناقص بؤرتيه Z_1 ، Z_2 وطول محوره الأكبر c.

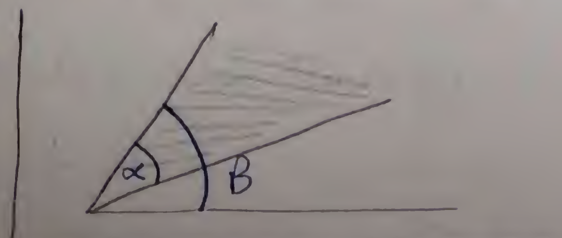
$\boxed{7}$ $\arg(Z - Z_0) = \alpha$



$\boxed{8}$ $0 \leqslant \arg(Z - Z_0) \leqslant \alpha$



$\boxed{9}$ $\alpha' \leqslant \arg(Z - Z_0) \leqslant B$



$\boxed{Ex}$ Find curves and regions graphically:-

a) $|z-i| < 2$

b) $|z-i| + |z+i| = 4$

c) $|\arg(z+3i)^3| \leq \pi$

$\boxed{Sol}$

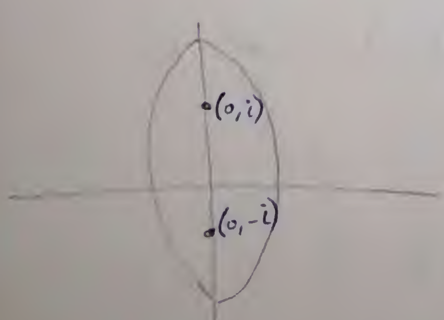
a)

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$ ~~...~~ ← i دائرة مركزها

ونصف قطرها 2 والتهشير داخل الدائرة

b)



قطع ناقص بؤرتيه

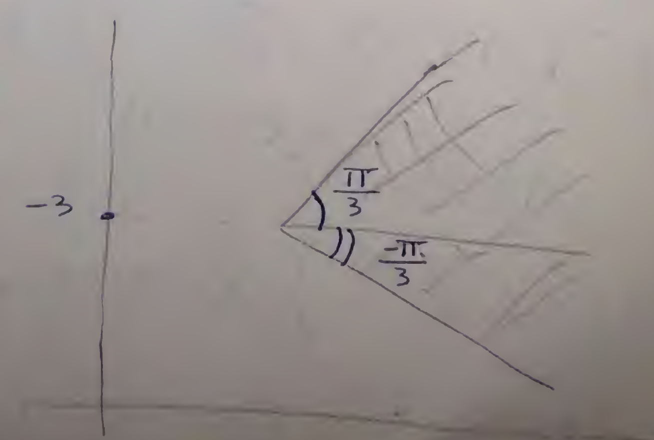
$Z_1 = i$ ، $Z_2 = -i$

وطول محور الأكبر 4 .

(c)

$-\pi \leq \arg(z-(5-3i))^3 \leq \pi$

$-\pi \leq 3\arg(z-(5-3i)) \leq \pi$



The Complex Functions

ـــ حيث أنه الأعداد المركبة يمكن أن تكتب بطريقتين

$Z = re^{i\theta}$ ، $Z = x + iy$ وكلاهما عند الفك لا يحتوى

على جزء حقيقى وجزء تخيلى عند الفك جميع الدوال عدا

($\ln z$ ، Z^{72} رقم) نستبدل z بإحدى قيمها .

Ex Put the following functions in form

$f(z) = u + iv$

[1] $f(z) = e^{5z}$ ، (2) $f(z) = z^5$

[3] $f(z) = \ln z$ [4] $f(z) = \sin z$

Sol

[1] $f(z) = e^{5z}$; $z = x + iy$

$$f(z) = e^{5(x+iy)} = e^{5x} \cdot e^{i5y}$$

$$= e^{5x} \cdot \left[\cos(5y) + i\sin(5y)\right]$$

$u = e^{5x} \cdot \cos 5y$ ، $v = e^{5x} \cdot \sin(5y)$

② $f(z) = z^5 = (re^{i\theta})^5 = r^5 \left[\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)\right]$

$u = r^5 \cos(5\theta)$

$v = r^5 \cdot \sin(5\theta)$

* لو عوضت عن $(Z = x + iy)$ صح
لكنه طويلة هتتعبك بذات الحدين.
$(x+iy)^5$

$\boxed{3}$ $f(z) = \ln(z) \quad ; \; Z = re^{i(\theta \pm 2\pi K)}$

$f(z) = \ln\left(re^{i(\theta \pm 2\pi K)}\right) = \ln r + \ln e^{i(\theta \pm 2\pi K)}$

$= \ln r + i(\theta \pm 2\pi K)$

at $K = 0$; the value is Principal value.

$\boxed{4}$ $f(z) = \sin z \quad ; \; Z = x + iy$

$= \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$

* ال Cos زي ما بتأكل الإشارة بتأكل ال i وتقلب.
ل (Cosh) و ال (sin) زي ما بتطلع الإشارة بتطلع
i وتقلب إلى (sinh)

$\therefore \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$u = \sin x \cdot \cosh y \; , \; v = \cos x \sinh y$

Some Notes

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

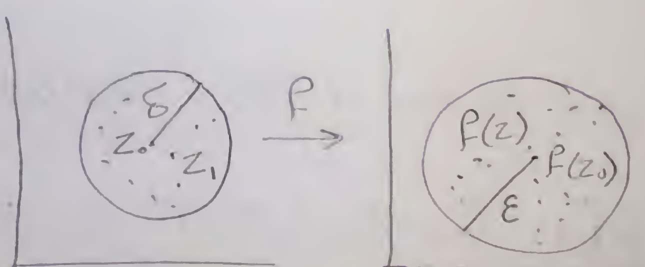
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\cos iz = \cosh z \quad , \quad \sin iz = i \sinh z$$

$$\cosh iz = \cos z \quad , \quad \sinh iz = i \sin z$$

The Continuity of Complex f^n

→ given $\varepsilon > 0$ there is exist $\delta > 0$ such that if $|z - z_0| < \delta$ then



$|z - z_0| < \delta \qquad |f(z) - f(z_0)| = \varepsilon$

$$\boxed{|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon}$$

الدالة تكون متصلة عند نقطة إذا تحققت الشروط الآتية :

١- الدالة معرفة عند z_0 .

٢- النهاية موجودة عند z_0.

$\lim_{z \to z_0} f(z_0)$ is exist

٣- النهاية = قيمة التعريف.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$